1 Opgave 2 van het tentamen Stochastiek A

De stochastische grootheden X en Y zijn onafhankelijk en geometrisch verdeeld met parameter p:

$$P(X=l) = P(Y=k) = p(1-p)^{k-1}; k = 1, 2, ...$$

Het minimum van X en Y geven we aan met Z, dus $Z = \min\{X, Y\}$.

a)

Laat zien dat Z geometrisch verdeeld is met parameter $p(2-p)$.
Uit bovenstaande blijkt dus dat geldt:

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= p(2-p)(1-p(2-p))^{k-1} \\ &= (-p^2+2p)(p^2-2p+1)^{k-1} \\ &= (2p-p^2)((p-1)^2)^{k-1} \\ &= (2p-p^2)((1-p)^2)^{k-1} \\ &= (2p-p^2)(1-p)^{2k-2} \\ &= (1-(1-p)^2)(1-p)^{2k-2} \end{aligned}$$

We zien dus dat een geometrische verdeling met parameter $p(2-p)$ hetzelde is als een verdeling met als kansmassafunctie $P(Z=k) = (1-(1-p)^2)(1-p)^{2k-2}$. Als we goed kijken naar die functie zien we nog steeds een soort van geometrische verdeling, namelijk een "dubbele". Je zou kunnen zeggen dat voor elke k er 2 kansen worden berekend; die van X en Y. Stel een geometrische verdeling voor als een model waarin we k-keer met een munt gooien, en pas op de k-de keer de eerste kop gooien (en dus eerst $k-1$ keer munt hebben gegooid). Dan zien we dat we de verdelingsfunctie van Z kunnen opvatten als de kans dat er $2k-2$ keer munt is gegooid ($(1-p)^{2k-2}$) waarna er minstens 1 kop wordt gegooid bij de k-de gooi ($(1-(1-p)^2)$). Dit komt precies overeen met wat Z moet voorstellen.

b)

Laat zien dat de conditionele verdeling van X gegeven $Z=k$ gegeven wordt door:
$f_{X|Z}(n|k) = \frac{1}{2-p}$ als $n=k$, en
$f_{X|Z}(n|k) = \frac{p}{2-p}(1-p)^{n-k}$ als $n>k$.

Als $Z=k$ is gebeurd zijn er voor X 2 mogelijkheden:
- X is het minimum, dus $n=k$, of

- Y was het minimum en dus $n > k$.
De clue zit hem dus in het berekenen van de kans of X het minimum is geweest of niet. We weten dat Z een geometrische verdeling met parameter $p(2-p)$ is. Dus $p(2-p)$ is de kans dat minstens 1 van 2 coinflips kop is. We weten dat de kans dat als een van X en Y kop is en dat X diegene is, gelijk is aan p. Dus de kans dat een van X en Y kop is en X diegene is, terwijl we zeker weten dat een van X en Y kop is, is gelijk aan:
$f_{X|Z}(n|k) = \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}$.

Evenzo geldt het dat als een van X en Y kop is, en we stellen dat X geen kop is, dat dan de kans daarop is: $\frac{1-p}{p(2-p)}$. Als dit het geval is dan geldt dus ook $n > k$, zie bovenstaande. X is nog altijd geometrisch verdeeld vanuit k; de kans dat X munt blijft gooien totaan n vanaf k, is gelijk aan $p(1-p)^{n-k-1}$. Dus:
$P_{X|Z}(n|k) = P(X \text{ is geen kop bij } k) * P(X \text{ blijft munt totaan } n)$,
$P_{X|Z}(n|k) = \frac{1-p}{p(2-p)} * p(1-p)^{n-k-1} = \frac{(1-p)^{n-k}}{2-p}$.

En dus:

$$\begin{aligned} f_{X|Z}(n|k) &= \sum_{i=k+1}^{n} \frac{(1-p)^{i-k}}{2-p} \\ &= \frac{1}{2-p} \sum_{i=k+1}^{n} (1-p)^{i-k} \end{aligned}$$